# *Problèmes de mécanique continue : correction*

## Exercice 1 : *Contraintes (Examen 2013)*

Dans un milieu continu, le champ de contraintes dans le système d'axes $(0, x_1, x_2, x_3)$ est donné par

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 & x_1(1-x_2^2) & 0 \\ x_1(1-x_2^2) & \frac{1}{3}(x_2^3 - 3x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Déterminez :

1. La force volumique pour que les équations d'équilibre soient satisfaites en tout point.
2. Les contraintes principales en $P$ $(a, 0, 2\sqrt{a})$ où $a > 0$.
3. La contrainte de cisaillement maximale en $P$.
4. Dessinez le cercle de Mohr en $P$.
5. Calculer les valeurs propres du déviateur du tenseur des contraintes $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ en $P$.

**Solution :**

1. $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = -4x_3.$
2. Les contraintes principales en $P$ $(a, 0, 2\sqrt{a})$ où $a > 0$ sont $\sigma_I = 8a, \quad \sigma_{II} = a, \quad \sigma_{III} = -a.$
3. La contrainte de cisaillement maximale en $P$ vaut $\tau_{max} = \pm\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \pm 4.5\, a$
4. Voir le cercle de Mohr en $P$ Figure 1.

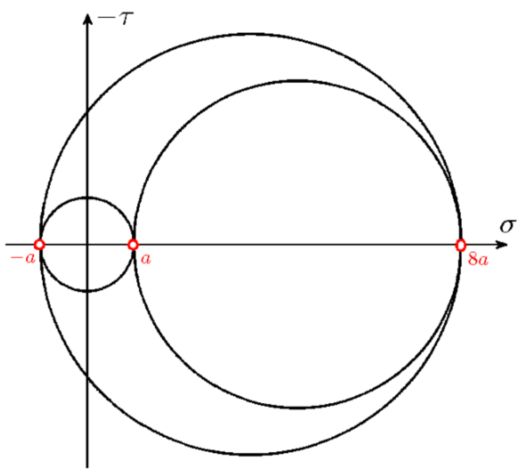



FIGURE 1 – Correction exercice 1 question 4

5. On calcul les valeurs propres du déviateur du tenseur des contraintes $s_{ij}$ en $P$ dans la base propre

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \sigma_{ij} - \frac{8}{3}a \tag{2}$$

$$\Rightarrow s_I = \sigma_I - \frac{8}{3}a = \frac{16}{3}a, \quad s_{II} = \sigma_{II} - \frac{8}{3}a = -\frac{5}{3}a, \quad s_{III} = \sigma_{III} - \frac{8}{3}a = -\frac{11}{3}a \tag{3}$$

**Exercice 2 :** ***Contrainte et critères de rupture (Examen 2011)***

Une barre de diamètre $d$ est chargée axialement par une charge P=45000N (voir figure 2).

1. Le matériau de la barre a une limite à la rupture en cisaillement de $\tau_o = 12 \times 10^6 \frac{N}{m^2}$.

   En construisant un cercle de Mohr, calculer le diamètre en dessous duquel la barre casse en cisaillement. Sur quel plan cette rupture se propage t-elle ?
2. Un autre ingénieur décide d'envisager de changer de matériaux pour passer à un critère de rupture octahédrique (avec le même $\tau_o$)

$$\sigma_{oct} = \sqrt{\frac{2}{9}\left(I_1^2 - 3I_2\right)} < \tau_0 \tag{4}$$

   ou $I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma})$ et $I_2 = \frac{1}{2}\left(tr\left(\boldsymbol{\sigma}^2\right) - tr\left(\boldsymbol{\sigma}\right)^2\right)$ avec $\boldsymbol{\sigma}$ tenseur des contraintes de Cauchy.

   Ce critère est-il plus ou moins contraignant ?

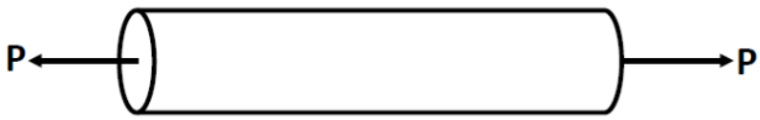



FIGURE 2 – Geométrie de la barre

**Solution :**

1. En regardant le cercle de Mohr (voir Figure 3), nous trouvons :

$$\sigma_I = 2\tau \tag{5}$$

   Dans le cas critique, ceci devient :

$$\frac{4P}{d_{crit}^2\pi} = 2\tau_0$$
$$d_{crit} = \sqrt{\frac{2P}{\tau_0\pi}}$$

   La rupture se propage sur un plan qui a un angle $\beta = \frac{\alpha}{2} = 45°$.

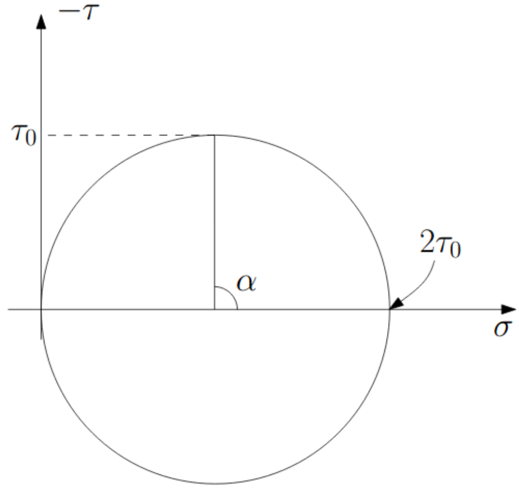



FIGURE 3 – Solution pour cercle de Mohr

2. Calculons les invariants

$$I_1 = \frac{4P}{d^2\pi}$$
$$I_2 = 0$$

Nous trouvons alors :

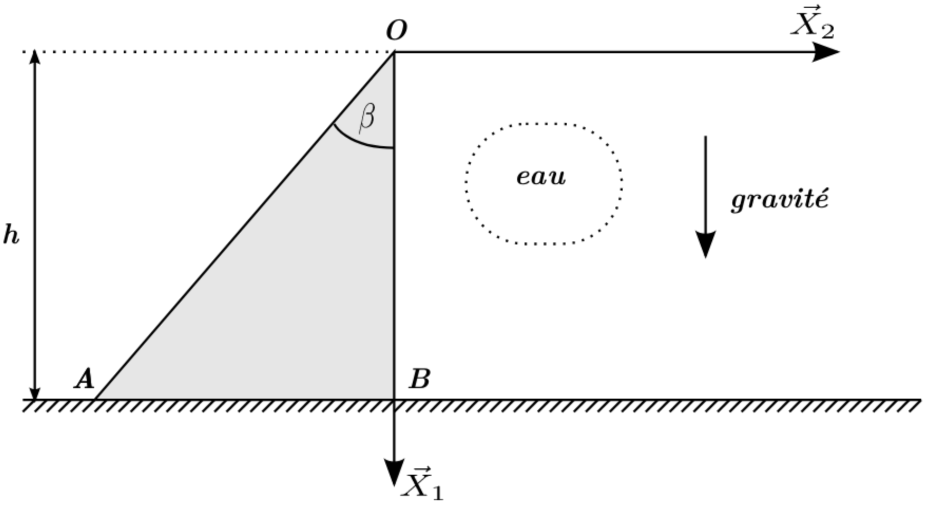
$$\sigma_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{4P}{d_{oct}^2\pi} = \tau_0$$
$$d_{oct} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{4P}{\pi\tau_0}} \tag{6}$$

Ce critére est moins contraignant que le premier

$$\frac{d_{oct}}{d_{crit}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} < 1$$

**Exercice 3 :** ***Problème de l'examen 2010***

Un jeune ingénieur se voit attribuer la mission de dresser une analyse en contrainte d'un barrage. La géométrie du problème est 2D avec pour section du barrage le triangle $OAB$, comme sur le schéma suivant :




Par convention, l'origine des axes est le point $O$ présenté sur le schéma. Afin d'alléger les calculs, on choisira l'angle $\beta$ égal à 45°. On suppose que la surface $OA$ du barrage est libre de contrainte, et que l'eau atteint le sommet du barrage (hauteur $h$). Notons également que la surface $AB$ est encastrée. Enfin, on dénote par $\rho_b$ la masse volumique du barrage.

1. L'ingénieur s'attarde tout d'abord à évaluer la contrainte imposée par l'eau sur le barrage. En faisant l'hypothèse que ce fluide admet un état de contrainte dit hydrostatique on a :

$$\underline{\sigma}_{\text{eau}} = -P_{\text{hydro}} \cdot \underline{I} \tag{7}$$

où le scalaire $P_{\text{hydro}}$ est la pression hydrostatique.
Ecrivez les équations d'équilibre sur un volume infinitésimal d'eau afin de déterminer $P_{\text{hydro}}$ en fonction de $x_1$, $\rho_e$ (la masse volumique de l'eau), et $g$ (le module de l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre).

2. Déterminez alors les conditions aux limites s'appliquant sur le côté $OB$ du barrage.

3. Donnez les conditions aux limites s'appliquant sur les autres côtés du barrage.
4. Après avoir examiné le barrage, le jeune ingénieur propose l'état de contrainte plan suivant :

$$\sigma_{11} = (k - \rho_b g)\, x_1 + c x_2 + e x_1^2 \quad (8)$$
$$\sigma_{22} = b x_1 + a x_2 + d x_2^2 \quad (9)$$
$$\sigma_{12} = -\,(a x_1 + k x_2) \quad (10)$$

où $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ et $k$ sont des paramètres fonction de $\rho_b$, $\rho_e$ et de l'angle $\beta$.

(a) Déterminer les paramètres $a$ et $b$ à partir de la condition aux limites sur le côté $OB$.

(b) En écrivant l'équation d'équilibre d'un élément de barrage, déterminer les paramètres $d$ et $e$.

(c) Déterminer les paramètres $c$ et $k$ du problème à partir de la condition aux limites sur le côté $OA$.

**Correction**

1. L'équation tensorielle d'équilibre sur un volume infinitésimal d'eau est égale à : $\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{eau}}) + \underline{b} = \underline{0}$

$$\underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{eau}}) + \underline{b} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial P_{\mathrm{hydro}}}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial P_{\mathrm{hydro}}}{\partial x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_e g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$P_{\mathrm{hydro}} = \rho_e g x_1 + C_1(x_2) + C_2 \quad (12)$$
$$P_{\mathrm{hydro}} = C_3(x_1) + C_4 \quad (13)$$

Par identification entre (12) et (13) on a,

$$C_1(x_2) = 0 \quad (14)$$
$$C_2 = C_4 \quad (15)$$
$$C_3(x_1) = \rho_e g x_1 \quad (16)$$

d'où $P_{\mathrm{hydro}} = \rho_e g x_1 + C_2$ pour satisfaire les équations d'équilibre. Cependant, dans notre cadre, la surface de l'eau étant libre de contrainte alors $P_{\mathrm{hydro}}(x_1 = 0) = C_2 = 0$. Ainsi $P_{\mathrm{hydro}} = \rho_e g x_1$.

2. Concernant le côté $OB$, le barrage subit la contrainte appliquée par l'eau ($\underline{t}_{\mathrm{eau}\to\mathrm{barrage}}$) qui est égale à :

$$\underline{t}_{\mathrm{eau}\to\mathrm{barrage}} = -\underline{t}_{\mathrm{barrage}\to\mathrm{eau}} = -\underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{eau}} \underline{n}_{OB}^{\mathrm{eau}} = P_{\mathrm{hydro}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P_{\mathrm{hydro}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

3. Les conditions aux limites sur les autres côtés du barrage sont :
   — Pour le côté $OA$ qui est libre de contrainte (i.e, subit aucune contrainte) : $\underline{t}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\underline{n}_{OA}^{\mathrm{barrage}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
   — Pour le côté $AB$ encastré, on a un déplacement nul dans les direction $\underline{x_1}$ et $\underline{x_2}$, donc $u_{x1} = u_{x2} = 0$.
   — Récapitulatif des conditions limites appliquées sur le barrage :

| Côtés | $\underline{x_1}$ | $\underline{x_2}$ |
|---|---|---|
| OB | $t_{x1} = 0$ | $t_{x2} = -P_{\mathrm{hydro}}$ |
| OA | $t_{x1} = 0$ | $t_{x2} = 0$ |
| AB | $u_{x1} = 0$ | $u_{x2} = 0$ |

4. l'état de contrainte du barrage est donné avec $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{barrage}} = \begin{bmatrix} (k-\rho_b g)x_1 + cx_2 + ex_1^2 & -(ax_1+kx_2) \\ -(ax_1+kx_2) & bx_1 + ax_2 + dx_2^2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

a) On sait que sur le côté $OB$ ($x_2 = 0$) du barrage s'applique un vecteur contrainte $\underline{t}_{\text{eau}\rightarrow\text{barrage}}$ donc :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{barrage}}\underline{n}_{OB}^{\text{barrage}} = \underline{t}_{\text{eau}\rightarrow\text{barrage}} \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} (k-\rho_b g)x_1 + ex_1^2 & -ax_1 \\ -ax_1 & bx_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P_{\text{hydro}} \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} -ax_1 \\ bx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_e g x_1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Par identification, on peut écrire que les paramètres : $a = 0$ et $b = -\rho_e g$.

b) L'équation tensorielle d'équilibre sur un volume infinitésimal du barrage est égale à : $\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{barrage}}) + \underline{b} = \underline{0}$.

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{barrage}}) + \underline{b} = \begin{bmatrix} k - \rho_b g + 2ex_1 - k \\ 2dx_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_b g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

D'où $e = 0$ et $d = 0$.

c) On détermine les paramètres $c$ et $k$ à partir de la condition aux limites sur le côté $OA$ où $x_1 = -x_2$, tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{barrage}}\underline{n}_{OA} = \underline{0} \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} [(k-\rho_b g) - c]\, x_1 & kx_1 \\ kx_1 & -\rho_e g x_1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} (\rho_b g + c - 2k)x_1 \\ (-k + \rho_e g)x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

D'où $c = (2\rho_e - \rho_b)g$ et $k = \rho_e g$.

Donc

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{barrage}} = \begin{bmatrix} (\rho_e - \rho_b)gx_1 + (2\rho_e - \rho_b)gx_2 & -\rho_e g x_2 \\ -\rho_e g x_2 & -\rho_e g x_1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

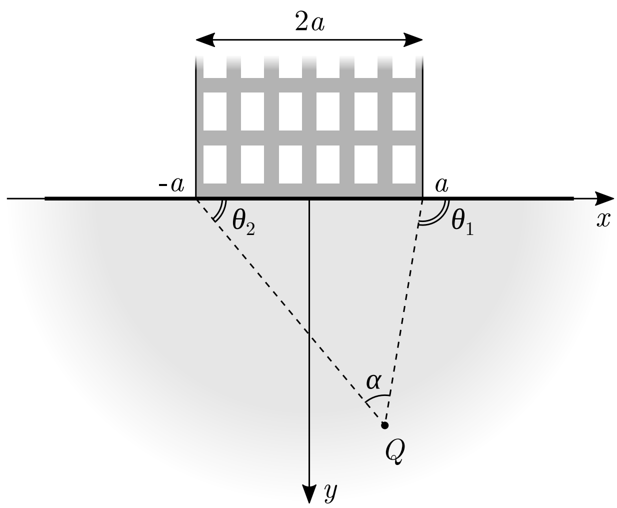
**Exercice 4 : *Contraintes dans le sol sous un bâtiment (examen 2019)***

Un bâtiment de largeur $2a$ exerce une pression verticale uniforme $p$ sur le sol. On s'intéresse aux contraintes dans le sol, que l'on suppose constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope.

La solution est connue en tout point $Q$ (voir figure) dans le sol :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{p}{2\pi}[2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \sigma_{yy} &= -\frac{p}{2\pi}[2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\ \tau_{xy} &= \frac{p}{2\pi}(\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \end{aligned}$$

où $x$, $y$, $\theta_1$ et $\theta_2$ sont définis dans la figure ci-dessous.




On rappelle les relations trigonométriques suivantes :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$
$$1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$$
$$\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$$

1. Diviser la surface du sol ($y = 0$) en trois régions. Quelles valeurs prennent $\theta_1$ et $\theta_2$ sur chaque région ? Vérifier que la solution satisfait les conditions aux limites à la surface du sol.
2. Vers quelles valeurs tendent les contraintes lorsque $y \to \infty$ ? Commenter.
3. Quelle est la valeur de $\tau_{xy}$ le long de l'axe $y$ ? *(Indication : exprimer la relation entre $\theta_1$ et $\theta_2$ lorsque $x = 0$).*
4. En déduire la valeur du cisaillement maximal $\tau_m = (\sigma_I - \sigma_{II})/2$ le long de l'axe $y$, où $\sigma_I$ et $\sigma_{II}$ sont les contraintes principales.
5. Calculer la valeur et l'emplacement du maximum de $\tau_m$ sur l'axe $y$. *(Indication : considérer les valeurs que peuvent prendre $\theta_1$ ou $\theta_2$ sur l'axe $y$)*
6. On considère le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$. Écrire son polynôme caractéristique puis calculer $\sigma_I$, $\sigma_{II}$ et $\tau_m$ exprimés selon $A$, $B$ et $C$.
7. En utilisant l'expression de $\tau_m$ trouvée dans la question 6, montrer que $\tau_m = \frac{p}{\pi} \sin\alpha$ dans le sol (dans tout le milieu semi-infini), avec $\alpha = \theta_1 - \theta_2$.
8. Pour quelle valeur de $\alpha$ le cisaillement maximal $\tau_m$ est-il le plus grand ? Cela est-il en accord avec la question 5 ? Tracer le lieu géométrique correspondant au $\tau_m$ maximal.

**Correction**

1. La surface du sol ($y = 0$) peut être divisée en trois régions selon la valeur que prend $x$ :
   1 $x < -a$,    2 $-a < x < a$    et    3 $x > a$.

   1 Lorsque $x < -a$, on a $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, ce qui implique $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$. La surface étant libre de tout effort, la condition aux limites est vérifiée.

   2 Lorsque $-a < x < a$, on a $\theta_1 = \pi$ et $\theta_2 = 0$, ce qui implique $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p$ et $\tau_{xy} = 0$. La surface est soumise à une pression verticale uniforme $p$, le vecteur de contraintes doit donc être égal à $\underline{t} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ p \end{smallmatrix}\right]$. Le vecteur des contraintes calculé à la surface de normale $\underline{n} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ à partir du tenseur des contraintes vaut

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} = \underline{t}\,.$$

La condition aux limites donc bien vérifiée.

3 Lorsque $x > a$, on a $\theta_1 = \theta_2 = 0$, ce qui implique $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$. La surface étant libre de tout effort, la condition aux limites est vérifiée.

2. Lorsque $y \to \infty$, les lignes reliant les coins de l'immeuble au point $Q$ deviennent parallèles, on a donc $\theta_1 - \theta_2 \to 0$, ce qui implique $\sigma_{xx} \to 0$, $\sigma_{yy} \to 0$ et $\tau_{xy} \to 0$. Les efforts se répartissent dans tout le milieu.
3. Lorsque $x = 0$, on a $\theta_2 = \pi - \theta_1$. On a donc

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{p}{2\pi}(\cos(2\theta_1) - \cos(2\pi - 2\theta_1))\\ &= \frac{p}{2\pi}(\cos(2\theta_1) - \cos(-2\theta_1))\\ &= \frac{p}{2\pi}(\cos(2\theta_1) - \cos(2\theta_1))\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

4. Puisque $\tau_{xy} = 0$, le tenseur des contraintes est diagonal et $\sigma_{xx}$ et $\sigma_{yy}$ sont les contraintes principales. Ne sachant pas à priori si $\sigma_{xx} \geqslant \sigma_{yy}$ ou si $\sigma_{xx} \leqslant \sigma_{yy}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\tau_m &= \left|\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right|\\ &= \left|-\frac{p}{2\pi}(\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)\right|\\ &= -\frac{p}{\pi}\sin 2\theta_1 = \frac{p}{\pi}\sin 2\theta_2 = \frac{2pay}{\pi(y^2 + a^2)}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\sin 2\theta_2 = \sin(2\pi - 2\theta_1) = \sin(-2\theta_1) = -\sin 2\theta_1$.
5. Sachant que sur l'axe $y$, $\theta_1 \in ]\frac{\pi}{2}, \pi]$, la valeur maximale de $\tau_m = -\frac{p}{\pi}\sin 2\theta_1$ est atteinte en $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$, ce qui nous donne $\tau_m = \frac{p}{\pi}$ atteint en $y = -a\tan\frac{3\pi}{4} = a$.
6. Le polynôme caractéristique de $\underline{\underline{\sigma}}$ est

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda\end{bmatrix}\right)\\ &= (A-\lambda)(C-\lambda) - B^2\\ &= \lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2)\,.\end{aligned}$$

En résolvant $P(\lambda) = 0$, on trouve les valeurs propres, qui sont les contraintes principales :

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \frac{A + C + \sqrt{(A-C)^2 + (2B)^2}}{2}\\ \sigma_{II} &= \frac{A + C - \sqrt{(A-C)^2 + (2B)^2}}{2}\end{aligned}$$

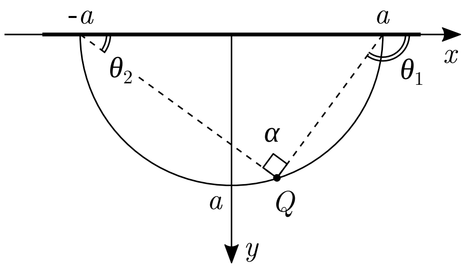
et on en déduit le cisaillement maximal

$$\tau_m = \frac{\sqrt{(A-C)^2 + (2B)^2}}{2}\,.$$

7. À partir de $\tau_m = \frac{\sqrt{(A-C)^2+(2B)^2}}{2}$, on effectue les remplacements $A = \sigma_{xx}$, $B = \tau_{xy}$ et $C = \sigma_{yy}$ :

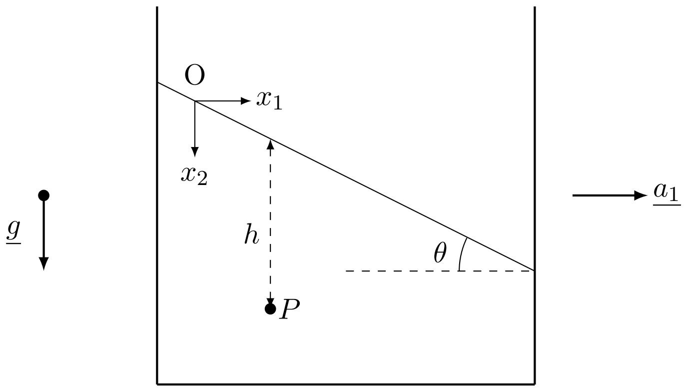
$$\begin{aligned}
A - C &= -\frac{p}{\pi}(\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)\,, \\
2B &= \frac{p}{\pi}(\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)\,, \\
(A-C)^2 + (2B)^2 &= \frac{p^2}{\pi^2}(\sin^2 2\theta_1 - 2\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 + \sin^2 2\theta_2 \\
&\qquad + \cos^2 2\theta_1 - 2\cos 2\theta_1 \cos 2\theta_2 + \cos^2 2\theta_2) \\
&= \frac{p^2}{\pi^2}(2 - 2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2)) \\
&= \frac{4p^2}{\pi^2}\sin^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
\frac{\sqrt{(A-C)^2+(2B)^2}}{2} &= \frac{p}{\pi}\sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&= \frac{p}{\pi}\sin\alpha
\end{aligned}$$

8. La valeur maximale de $\tau_m = \frac{p}{\pi}\sin\alpha$ est atteinte lorsque $\sin\alpha = 1$. Puisque $\alpha \in \left]0, \pi\right]$ partout dans le sol, ce maximum est atteint pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Cela correspond bien au point $y = a$ avec $\tau_m = \frac{p}{\pi}$ comme trouvé à la question 5. Le lieu géométrique correspondant au maximum de $\tau_m$ est le lieu où $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Il s'agit d'un demi-cercle de rayon $a$ centré sur l'origine.




**Exercice 5 :** ***Exercice de l'examen 2013 (exercice supplémentaire)***

Un réservoir contient un fluide homogène et bouge horizontalement vers la droite avec une accélération constante $\mathbf{a_1}$ (cf figure). L'origine du repère $(x_1, x_2)$ est placée en un point de la surface libre.




1. Rappelez les équations d'hydrostatique pour un fluide au repos, sachant que $\sigma_{ij} = -p\ \delta_{ij}$
2. En supposant que $p$ est une fonction de $x_1$ et $x_2$, et en utilisant les équations du mouvement, trouvez l'angle $\theta$ d'inclinaison de la surface libre (supposez qu'à la surface libre $p = p_{\text{atm}}$, la pression atmosphérique.
3. Trouvez la pression à un point $P$ dans le fluide.

**Correction :**

1. $$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \tag{27}$$

$$p = \rho g h + p_{\text{atm}} \tag{28}$$

2. L'accélération est :

$$a_1 = a \quad a_2 = a_3 = 0 \tag{29}$$

avec l'équation d'équilibre nous trouvons :

$$\rho a = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \tag{30}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g \tag{31}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \tag{32}$$

En intégrant la première equation, nous trouvons

$$p(x_1, x_2) = -\rho a x_1 + f(x_2) \tag{33}$$

et puis nous dérivons par $x_2$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \rho g \tag{34}$$

et par conséquent :

$$f(x_2) = \rho g x_2 + \text{cst} \tag{35}$$

Donc

$$p = -\rho a x_1 + \rho g x_2 + c \tag{36}$$

Sachant que $p = p_{\text{atm}}$ à $x_1 = x_2 = 0$, nous trouvons $c = p_{\text{atm}}$ et donc :

$$p = -\rho a x_1 + \rho g x_2 + p_{\text{atm}}$$

L'équation de la surface peut être trouvé en mettant $p(x_1, x_2) = p_{\text{atm}}$ :

$$p_{\text{atm}} = -\rho a x_1 + \rho g x_2 + p_{\text{atm}}$$

ce qui mène a

$$x_2 = \frac{a}{g} x_1$$

Donc l'angle est

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{a}{g}$$

3. Trouvez la pression à un point $P$ dans le fluide.

$$\frac{x_2 - h}{x_1} = \tan\theta \tag{37}$$

avec l'équation de la surface, nous trouvons :

$$x_2 = h + x_1 \frac{a}{g}$$

et puis

$$p(P) = -\rho a x_1 + \rho g \left( h + \frac{x_1 a}{g} \right) + p_{\text{atm}} = \rho g h + p_{\text{atm}}$$